2026 北京东城高三（上）期末

数　　学

本试卷共 9 页，共 150 分，时长 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}|-2\le 2x\le 4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|-1\le x<1\}$　B. $\{x|-1\le x<2\}$　C. $\{-1,0,1\}$　D. $\{-1,0\}$

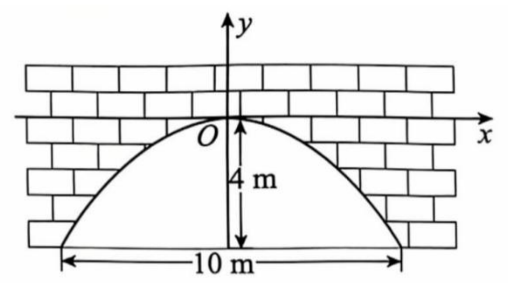
2. 已知复数 $z=(2+\mathrm{i})\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　B. $\sqrt{3}$　C. $\sqrt{5}$　D. 5

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_2+b_2=5$，$a_3+b_3=9$，则 $a_4=$

A. 4 B. 7 C. 8 D. 15

4. 在中国古代桥梁的建筑中，有不少是世界桥梁史上的创举. 如图所示，某抛物线形拱桥的桥拱跨度为 10m，拱高为 4m. 以桥拱最高点为原点，桥拱的对称轴为 y 轴，建立平面直角坐标系，则桥拱所在的抛物线的标准方程为



A. $x^2=-\frac{25}{8}y$ B. $x^2=-\frac{25}{4}y$ C. $x^2=-\frac{25}{2}y$ D. $x^2=-25y$

5. 设函数 $f(x)=|x|+\cos x$，则

A. $f(x)$ 是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 是奇函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 是奇函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减

6. 已知圆经过点 $A(-2,4)$，$B(2,0)$，则圆心到原点的距离的最小值为

A. 1　B. 2　C. $\sqrt{2}$　D. $2\sqrt{2}$

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}|x+2|, x<a\\(x-2)^2, x\ge a\end{cases}$，若 $f(x)$ 在区间 $(-3,3)$ 上的最大值为 9，则 $a=$

A. -1　B. 0　C. 1　D. $\frac{3}{2}$

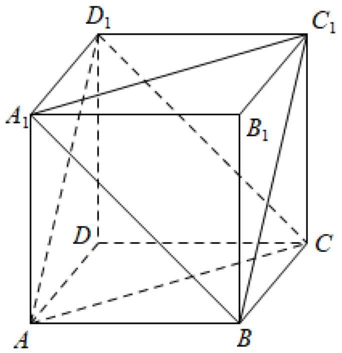
8. 设函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$，则“$f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$”是“存在实数 θ，使得 $f(x)=\sin(x+\theta)$”的

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　D.既不充分也不必要条件

9. 把物体放在空气中冷却，如果物体初始温度是 θ_1℃，空气的温度是 θ_0℃，那么 t min 后物体的温度 θ（单位：℃）可由公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt}$ 求得，其中冷却系数 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的常数. 现将一杯初始温度 100℃ 的水置于 20℃ 的空气中冷却. 水杯先在开盖状态下放置 t_1 min，随后加上盖子继续放置 t_2 min，此时水温降至 40℃. 已知在开盖状态和加盖状态下水杯中水的冷却系数分别为 0.05 和 0.01. 若 $t_1+t_2=60$，则 t_1 的值约为（参考数据：$\ln 2\approx 0.70$）

A. 10　　B. 20　　C. 30　　D. 40



10. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1. 平面 ACC_1A_1，平面 BCD_1A_1 和平面 ABC_1D_1 将该正方体分割成若干个多面体，则其中顶点 B_1 所在的多面体的表面积为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{2}$

C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+\dfrac{3}{2}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 在 $(x-\dfrac{2}{x})^6$ 的展开式中，x^2 的系数为_________.（用数字作答）

12. 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=2x$，则 $m=$_________.

13. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+1)=2f(x)$ 且 $f(0)>0$，写出满足条件的一个函数解析式 $f(x)=$_________.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(\cos\theta,\sin\theta)$，$B(-\sin\theta,\cos\theta)$，点 $P(x,y)$ 满足：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=1$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=2$. 若 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，则 $x=$_________；若 $\theta\in[0,2\pi)$，则 xy 的最大值为_________.

15. 若函数 $h(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对任意正数 M，都存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $|h(x_0)|>M$，则称 $h(x)$ 具有性质 P. 将具有性质 P 的函数所构成的集合记为 H. 给出下列四个结论：

①存在 $f(x)$，$g(x)\in H$，使得 $f(x)g(x)\notin H$；

②存在 $f(x)$，$g(x)\in H$，使得 $f(x)g(x)\in H$，且 $f(x)+g(x)\notin H$；

③存在 $f(x)$，$g(x)\in H$，且 $g(x)$ 为增函数，则 $f(g(x))\in H$；

④存在 $f(x)$，$g(x)\in H$，且 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则 $f(x)+g(x)\in H$.

其中正确结论的序号是_________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16.（本小题 13 分）

在锐角$\triangle ABC$中，$a=6$，$\sin 2A = 3\cos A\sin B$.

（Ⅰ）求b的值；

（Ⅱ）若D为BC边上的中点，从下列三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在，求AD的长.

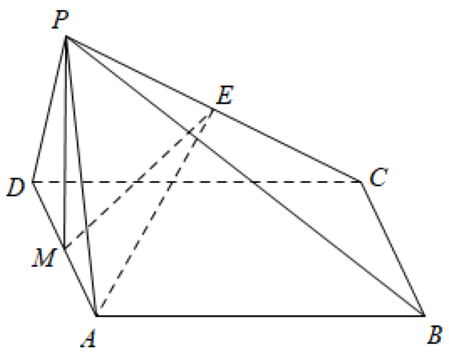
条件①：$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$；

条件②：$\triangle ABC$的面积为$6\sqrt{3}$；

条件③：$\triangle ABC$的周长为$10+2\sqrt{7}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题 14 分）



如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD=\sqrt{2}$，M为AD的中点，E为棱PC上一点.

（Ⅰ）若E为棱PC的中点，求证：$ME\,//$平面PAB；

（Ⅱ）设直线AE与平面PAB所成角为α，直线AE与平面$ABCD$所成角为β. 若$\alpha=\beta$，求$\dfrac{CE}{CP}$的值.

18.（本小题 13 分）

某平台开展答题比赛，比赛共进行两轮，选手每轮比赛可以从甲、乙两类问题中选择一类问题，平台从该类问题中随机抽取一个问题供选手回答. 比赛规定：甲类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；乙类问题中的每个问题回答正确得 50 分，否则扣 10 分；选手初始分数为 0 分. 假设某选手正确回答甲类问题的概率为$\dfrac{2}{3}$，正确回答乙类问题的概率为$\dfrac{2}{5}$.

（Ⅰ）若该选手两轮都选择甲类问题，求该选手累计得分不低于 20 分的概率；

（Ⅱ）若该选手第一轮选择甲类问题，第二轮选择乙类问题，记该选手累计得分为X，求X的分布列与数学期望$E(X)$；

（Ⅲ）若该选手每轮等可能地从甲、乙两类问题中选择一类问题，如果两轮的题目类型相同，记该选手的累计得分为Y；如果两轮的题目类型不同，记该选手的累计得分为Z. 试判断数学期望$E(Y)$与$E(Z)$的大小.（结论不要求证明）

19.（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 设 $P(m,n)$ 是椭圆 C 上一点，且在第一象限，$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{5}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）已知 PF_2 不与 x 轴垂直. 延长 PF_1,PF_2 分别与椭圆 C 交于点 M,N，若点 M 到直线 $x=-3$ 的距离与点 N 到直线 $x=3$ 的距离之和为 $\dfrac{24}{5}$，求 m 的值.

20.（本小题 15 分）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{bx}$.

（Ⅰ）当 $a=2$，$b=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a=3$，$b=2$ 时，

（ⅰ）求 $f(x)$ 的极值；

（ⅱ）若 $\lambda\in[2,\dfrac{5}{2}]$，求证：关于 x 的方程 $\dfrac{f(x)}{x}=\mathrm{e}^{\lambda x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无解.

21.（本小题 15 分）

已知数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\geq 4)$ 为有穷整数数列，定义变换 $T_i\ (i=1,2,\cdots,n-1)$：将 A 的第 i 项与第 $i+1$ 项同时减 1，其余项不变，所得数列记作 $T_i(A)$. 对 A 依次进行变换 $T_{i_1},T_{i_2},\cdots,T_{i_k}\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 后，所得数列记为 $T_{i_k}\cdots T_{i_2}T_{i_1}(A)$.

（Ⅰ）已知 $A:1,2,3,4$，直接写出 $T_1T_1T_3(A)$，$T_3T_1T_1(A)$；

（Ⅱ）已知 $n=5$，$a_1=a_3=a_5=3$，若存在变换 $T_{i_1},T_{i_2},\cdots,T_{i_k}$ 使得 $T_{i_k}\cdots T_{i_2}T_{i_1}(A)$ 的各项均为 0，求 a_2+a_4 的值；

（Ⅲ）已知 $n\ (n\geq 6)$ 为偶数，A 的各项均为正整数，且对任意的变换 $T_{i_1},T_{i_2},\cdots,T_{i_k}$，当 $T_{i_k}\cdots T_{i_2}T_{i_1}(A)$ 中的各项均为非负整数时，都有 $T_{i_k}\cdots T_{i_2}T_{i_1}(A)$ 中等于 0 的项的个数不大于 $\dfrac{n}{2}$，求 A 的各项之和的最小值.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D	（2）C	（3）B	（4）B	（5）A
（6）C	（7）A	（8）C	（9）B	（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）60　　（12）4

（13）2^x（答案不唯一）　　（14）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\dfrac{5}{2}$

（15）①②④

以下为选择填空题目详细解析：

1.【解析】对于集合 B，由 $-2\le 2x\le 4$，解得 $-1\le x\le 2$，又因为 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $B=\{-1,0,1,2\}$.

集合 $A=\{x|x<1\}$，则 $A\cap B=\{-1,0\}$，故选 D.

2.【解析】首先计算 $z=(2+\mathrm{i})\mathrm{i}$，根据复数乘法法则展开：$z=2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$，因为 $\mathrm{i}^2=-1$，

所以 $z=2\mathrm{i}-1=-1+2\mathrm{i}$. 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模为 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，这里 $a=-1$，$b=-2$，

则 $|z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，故选 C.

3.【解析】因为 $a_1=1$，所以 $a_2=a_1+d=1+d$，$a_3=a_1+2d=1+2d$；又因为 $b_1=1$，

所以 $b_2=b_1q=q$，$b_3=b_1q^2=q^2$.

由 $a_2+b_2=5$ 可得，$1+d+q=5$，即 $d+q=4$ ①

由 $a_3+b_3=9$ 可得，$1+2d+q^2=9$，即 $2d+q^2=8$ ②

由①得 $d=4-q$，代入②得：$2(4-q)+q^2=8$，化简得 $q^2-2q=0$，解得 $q=0$（舍），$q=2$，

代入①得 $d=4-2=2$.

所以 $a_4=a_1+3d=1+3\times 2=7$，故选 B.

4.【解析】设抛物线方程为 $x^2=-2py$，代入点 $(5,-4)$，$25=8p$，$p=\dfrac{25}{8}$，所以方程为

$x^2=-\dfrac{25}{4}y$，故选 B.

5.【解析】函数 $f(x)=|x|+\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称.

$f(-x)=|-x|+\cos(-x)=x+\cos x=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，

当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\cos x$，$f'(x)=1-\sin x\ge 0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故选 D.

6.【解析】由题，圆心在线段 AB 的中垂线上，$k_{AB}=\dfrac{4-0}{-2-2}=-1$，所以中垂线斜率为 1

设 AB 中点为 M ，$\frac{-2+2}{2}=0$，$\frac{4+0}{2}=2$，所以 $M(0,2)$，中垂线方程为：$y=x+2$

所以圆心到原点距离的最小值为原点到中垂线距离，$d=\frac{2}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，故选 C.

7.【解析】当 $x\in(-3,a)$ 时，$f(x)=|x+2|$

①$-3<a\le-2$ 时，$f(x)$ 在 $(-3,a)$ 上单减，无最大值；

②$-2<a<3$ 时，$f(x)$ 在 $(-3,-2)$ 上单减，在 $(-2,a)$ 上单增，无最大值；

因此最大值只能在 $x\ge a$ 上取得，令 $(x-2)^2=9$，$x\in(-3,3)$，所以 $x=-1$，

所以 $a\le-1$，故选 A. 且经验证，$a=-1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-3,3)$ 上的最大值为 9 .

8.【解析】$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，$\tan\theta=\frac{b}{a}$

若 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，则 $\sqrt{a^2+b^2}=1$，所以 $f(x)=\sin(x+\theta)$，即存在实数 θ，

使得 $f(x)=\sin(x+\theta)$，充分性成立；若存在实数 θ，使得 $f(x)=\sin(x+\theta)$，

则 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，必要性成立. 故选 C.

9.【解析】开盖状态：$\theta=20+(100-20)\mathrm{e}^{-0.05t_1}=20+80\mathrm{e}^{-0.05t_1}$ ①

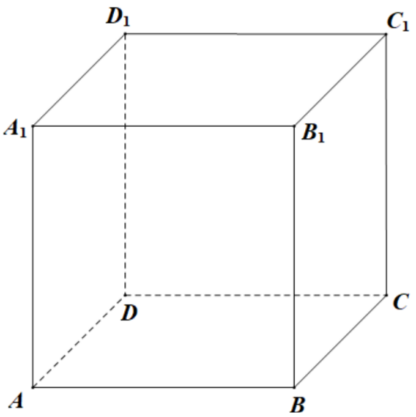
加盖状态：$40=20+(\theta-20)\mathrm{e}^{-0.01t_2}$ ②，由① $\theta-20=80\mathrm{e}^{-0.05t_1}$，

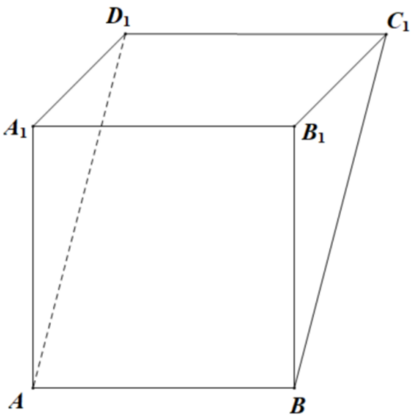
代入②，$40=20+80\mathrm{e}^{-0.05t_1}\cdot\mathrm{e}^{-0.01t_2}$，所以 $\mathrm{e}^{-0.05t_1-0.01t_2}=\frac{1}{4}$，

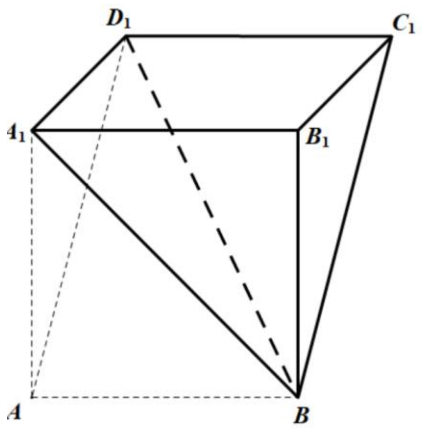
$-0.05t_1-0.01t_2=\ln\frac{1}{4}=-2\ln2\approx-1.4$，所以 c $0.05t_1+0.01t_2\approx1.4$，

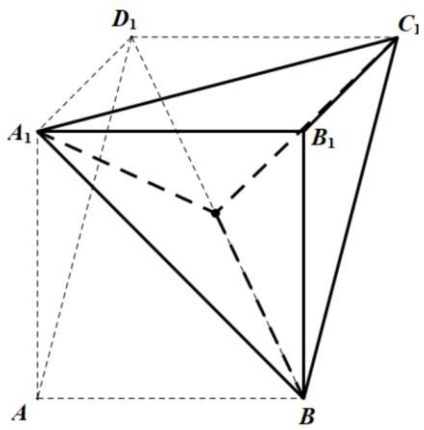
因为 $t_1+t_2=60$，解得 $t_1\approx20$，故选 B.

10.【解析】顶点 B_1 所在的多面体是六面体，表面积为 $\frac{1}{2}\times1\times1\times3+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}$









11.【答案】60

【解析】$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(-\dfrac{2}{x})^r$，则 $6-r-r=2$， $r=2$

$T_3=C_6^2x^4(-\dfrac{2}{x})^2=60x^2$，所以 x^2 的系数为 60.

12.【答案】4

【解析】由题，双曲线焦点在 x 轴上，且 $a^2=1$， $b^2=m$，

渐近线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x=2x$，所以 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{m}{1}=4$，所以 $m=4$.

13.【答案】2^x（答案不唯一）

已知 $f(x+1)=2f(x)$ 且 $f(0)>0$，定义域为 $\mathbf{R}$，

可筛选出指数函数，则 $f(x)=a^x$， $f(x+1)=a^{x+1}=a\cdot a^x=2f(x)=2a^x$，

则 $a=2$ 即可满足，所以 $f(x)=2^x$.

14.【答案】$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\dfrac{5}{2}$

【解析】若 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，则 $A(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$， $B(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y=1$ ①

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y=2$ ②

①－②： $\sqrt{2}x=-1$，所以 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

若 $\theta\in[0,2\pi)$， $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=x\cos\theta+y\sin\theta=1$ ①

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=-x\sin\theta+y\cos\theta=2$ ②

①²＋②²： $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta+2xy\sin\theta\cos\theta+x^2\sin^2\theta+y^2\cos^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta=5$

即 $x^2+y^2=5$，由 $xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{5}{2}$，当且仅当 $x=y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 时取得等号，

所以 xy 的最大值为 $\frac{5}{2}$.

15.【答案】①②④

【解析】① $f(x)=e^x$， $g(x)=\frac{1}{e^x}$， $f(x)\cdot g(x)=1\notin H$，①正确；

② $f(x)=x$， $g(x)=\frac{x}{2}$， $f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{2}x^2\in H$， $f(x)+g(x)=\frac{3}{2}x\in H$，②正确；

③ $f(x)=e^x$， $g(x)=-e^{-x}$， $f(g(x))=e^{-e^{-x}}\in(0,1)$，③不正确；

④因为 $f(x)\in H$， $f(x)$ 为奇函数，所以对 $\forall M>0$， $\exists x_0$ 使得 $f(x_0)=-f(-x_0)>M$，

因为 $g(x)$ 为偶函数，所以 $g(x_0)=g(-x_0)$，

若 $g(x_0)\ge 0$，则 $g(x_0)+f(x_0)>M$， $|g(x_0)+f(x_0)|>M$，

若 $g(x_0)<0$，则 $g(-x_0)<0$， $g(-x_0)+f(-x_0)<-M$， $|g(-x_0)+f(-x_0)|>M$

综上， $f(x)+g(x)\in H$，④正确

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ） 由 $\sin 2A=3\cos A\sin B$，得 $2\sin A\cos A=3\cos A\sin B$.

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\cos A\ne 0$.

所以 $2\sin A=3\sin B$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得 $2a=3b$.

由 $a=6$，得 $b=4$. --6 分

（Ⅱ）选择条件②：$\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$.

因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，

得 $\sin C=\frac{2S}{ab}$，故 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，

所以 $\angle C=\frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理

$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\times CD\cos C=4^2+3^2-2\times 4\times 3\times\frac{1}{2}=13.$$

所以 $AD=\sqrt{13}$. --13 分

选择条件③：$\triangle ABC$ 的周长为 $10+2\sqrt{7}$.

因为 $a=6$， $b=4$， $\triangle ABC$ 的周长为 $10+2\sqrt{7}$，

所以$c=2\sqrt{7}$.

由余弦定理$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{6^2+4^2-(2\sqrt{7})^2}{2\times 6\times 4}=\dfrac{1}{2}$.

在$\triangle ACD$中，由余弦定理

$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\times CD\cos C=4^2+3^2-2\times 4\times 3\times\frac{1}{2}=13.$$

所以$AD=\sqrt{13}$. --13 分

17.（共 14 分）

解：（Ⅰ）如图，取PB中点F，连接AF,EF.

因为E是PC的中点，

所以$EF\,//\,BC$，$EF=\dfrac{1}{2}BC$.

因为M为AD中点，

所以$AM\,//\,BC$，$AM=\dfrac{1}{2}BC$.

所以$AM\,//\,EF$，$AM=EF$.

所以四边形$AMEF$是平行四边形.

所以$ME\,//\,AF$.

因为$ME\not\subset$平面PAB，$AF\subset$平面PAB，

所以$ME\,//$平面PAB. ---5 分

（Ⅱ）如图，取BC中点N，连接MN.

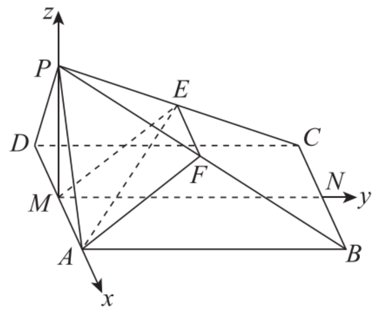
因为底面$ABCD$是正方形，M为AD的中点，所以$AD\perp MN$.

因为$PA=PD$，所以$PM\perp AD$.

因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PM\subset$平面PAD，

平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，所以$PM\perp$平面$ABCD$.

因为$MN\subset$平面$ABCD$，所以$PM\perp MN$.



如图建立空间直角坐标系$M-xyz$，

则$P(0,0,1)$，$C(-1,2,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,2,0)$.

因此$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{CP}=(1,-2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$.

设平面PAB的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2y=0,\\ x-z=0.\end{cases}$$

令$x=1$，则$z=1$，$y=0$.

所以平面PAB的法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,1)$.

设$\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CP}=(\lambda,-2\lambda,\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{AE}=(\lambda-2,2-2\lambda,\lambda)$.

$\overrightarrow{MP}=(0,0,1)$ 为平面 $ABCD$ 的法向量，

$$\sin\alpha=|\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{AE}>|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AE}|}=\frac{|2\lambda-2|}{\sqrt{2}|\overrightarrow{AE}|},$$

$$\sin\beta=|\cos<\overrightarrow{MP},\overrightarrow{AE}>|=\frac{|\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{MP}||\overrightarrow{AE}|}=\frac{|\lambda|}{|\overrightarrow{AE}|}.$$

因为 $\alpha=\beta$，所以 $\frac{|2\lambda-2|}{\sqrt{2}|\overrightarrow{AE}|}=\frac{|\lambda|}{|\overrightarrow{AE}|}$，即 $\lambda^2-4\lambda+2=0$，解得 $\lambda=2\pm\sqrt{2}$.

因为 $\lambda\in[0,1]$，所以 $\lambda=2-\sqrt{2}$，即 $\frac{CE}{CP}$ 的值为 $2-\sqrt{2}$. --------------------------14 分

18.（共 13 分）

解：（Ⅰ）设事件 $M=$ “两轮比赛累计得分不低于 20 分”，

由已知该选手正确回答甲类问题的概率为 $\frac{2}{3}$.

所以 $P(M)=1-P(\overline{M})=1-(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})=\frac{8}{9}$.

所以该选手两轮比赛累计得分不低于 20 分的概率为 $\frac{8}{9}$. ---------------------------3 分

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 $-10,10,50,70$.

$P(X=-10)=(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{5})=\frac{1}{5}$，$P(X=10)=\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{5})=\frac{2}{5}$，

$P(X=50)=(1-\frac{2}{3})\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$，$P(X=70)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$，

X 的分布列为

X	-10	10	50	70
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$

X 的数学期望 $E(X)=(-10)\times\frac{1}{5}+10\times\frac{2}{5}+50\times\frac{2}{15}+70\times\frac{4}{15}=\frac{82}{3}$. ---------------10 分

（Ⅲ）$E(Y)=E(Z)$. ---13 分

19.（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases}2a=2\sqrt{5},\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=\sqrt{5}$，$b=2$，$c=1$.

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. ---5 分

（Ⅱ）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 $PF_1: y=k_1(x+1)$，直线 $PF_2: y=k_2(x-1)$，

其中$k_1=\frac{n}{m+1}$，$k_2=\frac{n}{m-1}$.

因为点P在椭圆C上，所以$4m^2+5n^2=20$.

由$\begin{cases}y=k_1(x+1),\\4x^2+5y^2=20\end{cases}$得$(5k_1^2+4)x^2+10k_1^2x+5k_1^2-20=0$.

则$m+x_1=-\frac{10k_1^2}{5k_1^2+4}=-\frac{10(\frac{n}{m+1})^2}{5(\frac{n}{m+1})^2+4}=-\frac{10n^2}{5n^2+4(m+1)^2}=\frac{m^2-5}{m+3}$.

所以$x_1=-\frac{3m+5}{m+3}$.

由$\begin{cases}y=k_2(x-1),\\4x^2+5y^2=20\end{cases}$得$(5k_2^2+4)x^2-10k_2^2x+5k_2^2-20=0$，

则$m+x_2=\frac{10k_2^2}{5k_2^2+4}=\frac{10(\frac{n}{m-1})^2}{5(\frac{n}{m-1})^2+4}=\frac{10n^2}{5n^2+4(m-1)^2}=\frac{m^2-5}{m-3}$.

所以$x_2=\frac{3m-5}{m-3}$.

由于点M到直线$x=-3$的距离与点N到直线$x=3$的距离之和为$\frac{24}{5}$，

所以$|-3-x_1|+|3-x_2|=x_1+3+3-x_2=\frac{24}{5}$.

故$x_2-x_1=\frac{6}{5}$，即$\frac{3m-5}{m-3}+\frac{3m+5}{m+3}=\frac{6}{5}$.

解得$m=\pm2$.

由于$P(m,n)$在第一象限，

所以$m=2$. --15分

20.（共15分）

解：（Ⅰ） 由条件得$f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$.

所以$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$.

所以$f'(0)=1$.

因为$f(0)=0$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=x$. ---------------------------4分

（Ⅱ）（ⅰ）由条件得$f(x)=\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}$，

所以$f'(x)=3\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$.

令 $f'(x)=0$，即 $3\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}=0$，

解得 $x=\ln\frac{2}{3}$.

当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 变化如下：

x	$(-\infty,\ln\frac{2}{3})$	$\ln\frac{2}{3}$	$(\ln\frac{2}{3},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(\ln\frac{2}{3})=-\frac{4}{27}$，无极大值. ----------------------------------9 分

（ii）关于 x 的方程 $\frac{f(x)}{x}=\mathrm{e}^{\lambda x}$ 等价于 $\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}=x\mathrm{e}^{\lambda x}\ (x\neq 0)$，

由于 $\mathrm{e}^{2x}>0$，

故 $\mathrm{e}^{x}-1=x\mathrm{e}^{(\lambda-2)x}$.

令 $g(x)=\mathrm{e}^{x}-1-x\mathrm{e}^{(\lambda-2)x}$，

所以 $g'(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{(\lambda-2)x}-(\lambda-2)x\mathrm{e}^{(\lambda-2)x}=\mathrm{e}^{(\lambda-2)x}[\mathrm{e}^{(3-\lambda)x}-1-(\lambda-2)x]$.

令 $p(x)=\mathrm{e}^{(3-\lambda)x}-1-(\lambda-2)x$，

则 $p'(x)=(3-\lambda)\mathrm{e}^{(3-\lambda)x}+2-\lambda$，

因为 $\lambda\in[2,\frac{5}{2}]$，$(3-\lambda)x>0$，

所以 $p'(x)\geq\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(3-\lambda)x}-\frac{1}{2}>0$.

所以 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $p(0)=0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$p(x)>0$，即 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $g(0)=0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$.

故当 $\lambda\in[2,\frac{5}{2}]$ 时，关于 x 的方程 $\frac{f(x)}{x}=\mathrm{e}^{\lambda x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无解. ------------------15 分

21.（共 15 分）

解：（Ⅰ）$T_1T_1T_3(A):-1,0,2,3$；$T_3T_1T_1(A):-1,0,2,3$. --4 分

（Ⅱ）由于变换 $T_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，将 A 的第 i 项与第 $i+1$ 项同时减 1，

因此变换前的数列与变换后的数列的奇数项的和与偶数项的和之差不变.

对于 $A:a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ 中，$a_1=a_3=a_5=3$，

此时 A 的奇数项的和与偶数项的和之差为 $9-(a_2+a_4)$.

当 $T_{i_k}T_{i_{k-1}}\cdots T_{i_1}(A)$ 的各项均为 0 时，变换后的数列的奇数项的和与偶数项的和之差为 0 ，因此 $9-(a_2+a_4)=0$ ，即 $a_2+a_4=9$. --9 分

（III）因为 $n(n\ge 6)$ 为偶数，把 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分成 $\dfrac{n}{2}$ 组，

其中 a_1,a_2 为第 1 组， a_3,a_4 为第 2 组， $\cdots$ ， a_{n-3},a_{n-2} 为第 $\dfrac{n}{2}-1$ 组， a_{n-1},a_n 为第 $\dfrac{n}{2}$ 组，存在变换使每组的两个数中至少一个变为 0 ，

因此存在变换 $T_{i_1},T_{i_2},\cdots,T_{i_k}$ ， 当 $T_{i_k}\cdots T_{i_2}T_{i_1}(A)$ 中的项非负时， $T_{i_k}\cdots T_{i_2}T_{i_1}(A)$ 所有项中 0 的个数不小于 $\dfrac{n}{2}$.

由已知可得同一组的两个数不能相同.

下证第 2 组，第 3 组， $\cdots$ ，第 $\dfrac{n}{2}-1$ 组，这 $\dfrac{n}{2}-2$ 组数满足：每一组中的较大数不小于 3 .

考察第 2 组数 a_3,a_4 ，不妨设 $a_3>a_4$ ，

若 $a_3<3$ ，则 a_3 只能为 1 或 2 ，此时存在一组变换使得第 2 组的两个数均变为 0 ，矛盾.

同理可以证明其它组的两个数中较大的不小于 3 .

对于第 1 组 a_1,a_2 这两个数，至少有一个不小于 2 ，

对于第 $\dfrac{n}{2}$ 组 a_{n-1},a_n 这两个数，至少有一个不小于 2 ，

因此 A 的所有项之和不小于 $2n-2$.

令 $A:2,1,\underbrace{3,1,3,1,\cdots,3,1}_{\frac{n}{2}-2\text{组}},1,2$ ，

这个数列满足对任意的一组变换 $T_{i_1},T_{i_2},\cdots,T_{i_k}$ ， 当 $T_{i_k}\cdots T_{i_2}T_{i_1}(A)$ 中的项非负时， A 中的 3 和 2 均不会变为 0 ，

因此 $T_{i_k}\cdots T_{i_2}T_{i_1}(A)$ 中 0 的个数不大于 $\dfrac{n}{2}$.

综上所述， A 的所有项之和的最小值为 $2n-2$. ------------------------------------15 分